§ 5. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Для рассмотрения теоремы об изменении кинетической энергии необходимо ввести новое понятие «работа силы» и рассмотреть некоторые простейшие способы ее вычисления.

Работа силы

Работа силы на каком-либо перемещении является одной из основных характеристик, оценивающих действие силы на этом перемещении. Рассмотрим элементарную работу, полную работу и мощность.

Элементарная работа силы. Элементарная работа $\mathrm{d}A$ силы $\bar{F}$ на элементарном (бесконечно малом) перемещении $\mathrm{d}s$ определяется следующим образом (рис. 60):

$$\mathrm{d}A = F_\tau \mathrm{d}s, \tag{40}$$

где F_τ — проекция силы $\bar{F}$ на направление скорости точки приложения силы или на направление элементарного перемещения, которое считается направленным по скорости точки.

Элементарная работа является скалярной величиной. Ее знак определяется знаком проекции силы F_τ, так как перемещение $\mathrm{d}s$ принимаем положительным. При $F_\tau > 0$ элементарная работа $\mathrm{d}A > 0$, а при $F_\tau < 0$, наоборот, $\mathrm{d}A < 0$. Так как $F_\tau = F\cos\varphi$, где φ — угол между силой $\bar{F}$ и направлением скорости точки $\bar{v}$, то выражение (40) можно представить в виде

$$\mathrm{d}A = F\cos\varphi\,\mathrm{d}s. \tag{41}$$

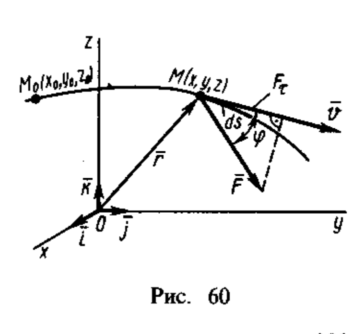

Рис. 60

В этой формуле величины F и $\mathrm{d}s$ положительны и знак $\mathrm{d}A$ определяется знаком $\cos\varphi$. Если φ — острый угол, то $\mathrm{d}A$ положительна; если φ тупой угол, то $\mathrm{d}A$ отрицательна.

Итак, *элементарная работа силы равна произведению элементарного перемещения на проекцию силы на это перемещение.* Отметим частные случаи, которые можно получить из (41):

$$\varphi = 0^\circ, \quad \mathrm{d}A = F\mathrm{d}s;$$
$$\varphi = 90^\circ, \quad \mathrm{d}A = 0;$$
$$\varphi = 180^\circ, \quad \mathrm{d}A = -F\mathrm{d}s.$$

Таким образом, если сила перпендикулярна элементарному перемещению, то ее элементарная работа равна нулю. В частности, работа нормальной составляющей к скорости силы $\bar{F}_n$ всегда равна нулю.

Приведем другие формулы для вычисления элементарной работы силы. Из кинематики точки известно, что $\bar{v} = \mathrm{d}\bar{r}/\mathrm{d}t$; $v = |\bar{v}| = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$. Следовательно, $\mathrm{d}s = |\mathrm{d}\bar{r}| = v\mathrm{d}t$.

После этого, согласно (41), элементарная работа

$$\mathrm{d}A = F|\mathrm{d}\bar{r}|\cos\varphi = \bar{F}\cdot\mathrm{d}\bar{r}. \tag{42}$$

Элементарная работа силы равна скалярному произведению силы на дифференциал радиуса-вектора точки приложения силы.

Так как $\mathrm{d}\bar{r} = \bar{v}\mathrm{d}t$, то, согласно (42),

$$\mathrm{d}A = \bar{F}\cdot\mathrm{d}\bar{r} = \bar{F}\cdot\bar{v}\mathrm{d}t = \bar{F}\mathrm{d}t\cdot\bar{v}. \tag{43}$$

Элементарная работа равна скалярному произведению элементарного импульса силы на скорость точки.

Если силу $\bar{F}$ и радиус-вектор $\bar{r}$ разложить по осям координат, то

$$\bar{F} = F_x\bar{i} + F_y\bar{j} + F_z\bar{k}; \quad \bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}.$$

Из последней формулы имеем

$$\mathrm{d}\bar{r} = \mathrm{d}x\bar{i} + \mathrm{d}y\bar{j} + \mathrm{d}z\bar{k}.$$

Подставляя в (42) значения $\bar{F}$ и $\mathrm{d}\bar{r}$, получаем

$$\mathrm{d}A = F_x\mathrm{d}x + F_y\mathrm{d}y + F_z\mathrm{d}z. \tag{44}$$

Формулу (44) называют обычно **аналитическим выражением элементарной работы**. Хотя выражение для элементарной работы (44) по форме и напоминает полный дифференциал функции координат точки, в действительности в общем случае элементарная работа не является полным дифференциалом. Элементарная работа является полным дифференциалом функции координат точки только для специального класса сил — так называемых стационарных *потенциальных сил*, которые рассмотрены ниже.

Полная работа силы. Для определения полной работы силы $\bar{F}$ на перемещении от точки M_0 до точки M разобьем это перемещение на n перемещений, каждое из которых в пределе переходит в элементарное. Тогда работу A можно выразить формулой

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{d}A_k,$$

где $\mathrm{d}A_k$ — работа на k-м элементарном перемещении, на которые разбито полное перемещение.

Так как сумма в определении работы является интегральной суммой определения криволинейного интеграла на участке кривой M_0M, то, используя для элементарной работы формулу (40), получаем

$$A = \int_{M_0}^{M} F_\tau\mathrm{d}s. \tag{45}$$

Используя другие выражения для элементарной работы, полную работу силы можно представить также в виде

$$A = \int_{M_0}^{M}\bar{F}\cdot\mathrm{d}\bar{r} = \int_{M_0}^{M}(F_x\mathrm{d}x + F_y\mathrm{d}y + F_z\mathrm{d}z), \tag{46}$$

или

$$A = \int_0^t \bar{F}\cdot\bar{v}\mathrm{d}t, \tag{47}$$

где момент времени $t = 0$ соответствует точке M_0, а момент времени t — точке M.

Формула (47) особенно удобная для вычисления работы силы, когда сила известна как функция времени. Отметим, что из определения элементарной и полной работы следует:

1) работа равнодействующей силы на каком-либо перемещении равна алгебраической сумме работ составляющих сил на том же перемещении;

2) работа силы на полном перемещении равна сумме работ этой же силы на составляющих перемещениях, на которые любым образом разбито все перемещение.

Первое свойство, очевидно, достаточно доказать только для элементарной работы равнодействующей силы.

Если сила $\bar{R}$ является равнодействующей силой системы сил $(\bar{F}_1, ..., \bar{F}_k)$, приложенных к рассматриваемой точке, то она выражается геометрической суммой этих сил. Тогда по определению элементарной работы силы имеем

$$\bar{R}\cdot\mathrm{d}\bar{r} = (\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \ldots + \bar{F}_k)\cdot\mathrm{d}\bar{r} = \bar{F}_1\cdot\mathrm{d}\bar{r} + \bar{F}_2\cdot\mathrm{d}\bar{r} + \ldots + \bar{F}_k\cdot\mathrm{d}\bar{r}.$$

Первое свойство доказано.

Второе из отмеченных свойств непосредственно следует из возможности разбиения любым образом полного промежутка интегрирования на составляющие, причем определенный интеграл по полному промежутку интегрирования равен сумме интегралов по составляющим. Единицей полной работы, так же как и элементарной, в СИ является джоуль: 1 Дж = 1 Н · м.

Если проекция силы на направление скорости F_τ является величиной постоянной, то из (45) получим

$$A = F_\tau s,$$

где s — путь, пройденный точкой.

Так как $F_\tau = F\cos\varphi$, то последнюю формулу можно представить в виде

$$A = Fs\cos\varphi.$$

Следует отметить, что в этой формуле как F, так и φ могут быть переменными, но $F\cos\varphi$ является постоянной величиной. Это выполняется, если F и φ постоянны. Если дополнительно угол $\varphi = 0$ или 180°, то тогда

$$A = \pm Fs,$$

причем эта формула применима как для прямолинейного, так и для криволинейного движения. Для этого необходимо, чтобы сила $\bar{F}$ была постоянной по модулю и все время направленной по касательной к траектории точки. В случае прямолинейной траектории сила $\bar{F}$, следовательно, должна быть все время направлена по траектории в одну и ту же сторону.

Мощность. Мощность силы или работоспособность какого-либо источника силы часто оценивают той работой, которую он может совершить за единицу времени.

Итак, по определению, мощность

$$W = \mathrm{d}A/\mathrm{d}t.$$

Учитывая (43) для элементарной работы, мощность W можно представить в виде

$$W = \bar{F}\cdot\bar{v} = Fv\cos\varphi. \tag{48}$$

Таким образом, *мощность равна скалярному произведению силы на скорость точки.* Из формулы (48) получаем, что чем больше скорость, тем меньше сила при одной и той же мощности. Следовательно, если от источника силы с заданной мощностью нужно получить большую силу, то ее можно получить только при малой скорости. Так, например, когда железнодорожному локомотиву надо увеличить силу тяги, то для этого надо уменьшить скорость поезда.

В СИ единицей мощности является ватт: 1 Вт = 1 Дж/с.

Примеры вычисления работы силы

Работа силы в общем случае зависит от характера движения точки приложения силы. Следовательно, для вычисления работы надо знать движение этой точки. Но в природе имеются силы и примеры движения, для которых работу можно вычислить сравнительно просто, зная начальное и конечное положение точки.

Рассмотрим работу силы тяжести и линейной силы упругости, изменяющейся по закону Гука, и вычисление работы

силы, приложенной к какой-либо точке твердого тела в различных случаях его движения. В качестве простейших примеров движения укажем случаи, когда работа равна нулю. Так, работа любой силы равна нулю, если она приложена все время в неподвижной точке или в точках, скорость которых равна нулю, как, например, в случае, когда сила все время приложена в мгновенном центре скоростей при плоском движении тела или все время в точках лежащих на мгновенной оси вращения, в случае вращения тела вокруг неподвижной точки. Эти случаи возможны в задачах, когда рассматривают работу силы трения в точке соприкосновения двух тел при отсутствии скольжения одного тела по другому. При этом работа силы трения равна нулю.

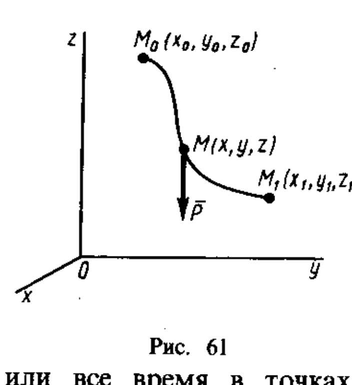

Рис. 61

Работа силы тяжести. Силу тяжести $\bar{P}$ материальной точки массой m вблизи поверхности Земли можно считать постоянной, равной mg, направленной по вертикали вниз. Если взять оси координат $Oxyz$, у которых ось Oz направлена по вертикали вверх (рис. 61), то

$$P_x = 0; \quad P_y = 0; \quad P_z = -mg.$$

Вычисляя работу A силы $\bar{P}$ на перемещении от точки M_0 до точки M_1 по формуле (46), имеем

$$A = \int_{M_0}^{M_1}(P_x\mathrm{d}x + P_y\mathrm{d}y + P_z\mathrm{d}z) = -mg\int_{z_0}^{z_1}\mathrm{d}z = -mg(z_1 - z_0) = mg(z_0 - z_1),$$

или

$$A = mgh, \tag{49}$$

где $h = z_0 - z_1$ — высота опускания точки.

При подъеме точки высота h является отрицательной. Следовательно, в общем случае работа силы тяжести $P = mg$ равна

$$A = \pm Ph. \tag{50}$$

Работа силы тяжести равна произведению этой силы на высоту опускания (работа положительна) или высоту подъема (работа отрицательна). Из формулы (50) следует, что работа силы тяжести не зависит от формы траектории между точками M_0 и M_1, и если эти точки совпадают, то работа силы тяжести равна нулю (случай замкнутого пути). Она равна

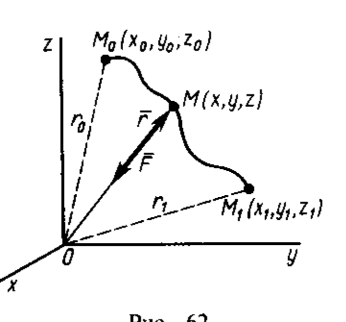

Рис. 62

нулю, если точки M_0 и M_1 лежат в одной и той же горизонтальной плоскости.

Если имеем систему N материальных точек, то для каждой точки с массой m_k будем иметь работу ее силы тяжести

$$A_k = m_kg(z_{0k} - z_{1k}),$$

где z_{0k} и z_{1k} — начальная и конечная координаты точки.

Работа всех сил тяжести системы материальных точек

$$A = \sum_{k=1}^{N}A_k = g\left(\sum_{k=1}^{N}m_kz_{0k} - \sum_{k=1}^{N}m_kz_{1k}\right) = Mg(z_{0C} - z_{1C}),$$

так как

$$\sum_{k=1}^{N}m_kz_{0k} = Mz_{0C}; \quad \sum_{k=1}^{N}m_kz_{1k} = Mz_{1C},$$

где M — масса системы точек; z_{0C} и z_{1C} — начальная и конечная координаты центра масс системы точек. Вводя обозначение для изменения высоты центра масс $z_{0C} - z_{1C} = \pm h_C$, имеем

$$A = \pm Mgh_C. \tag{50'}$$

Из (50′) следует, что для перемещений точек системы, при которых $h_C = 0$, работа сил тяжести $A = 0$.

Работа линейной силы упругости. Линейной силой упругости (или линейной восстанавливающей силой) называют силу, действующую по закону Гука (рис. 62):

$$\bar{F} = -c\bar{r},$$

где $\bar{r}$ — расстояние от точки равновесия, где сила равна нулю, до рассматриваемой точки M; c — постоянный коэффициент жесткости.

Выберем начало координат в точке равновесия O, тогда

$$F_x = -cx; \quad F_y = -cy; \quad F_z = -cz.$$

После этого работу на перемещении от точки M_0 до точки M_1 определим по формуле

$$A = \int_{M_0}^{M_1}(F_x\mathrm{d}x + F_y\mathrm{d}y + F_z\mathrm{d}z) = -c\int_{M_0}^{M_1}(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z) = -c\int_{r_0}^{r_1}r\mathrm{d}r,$$

так как

$$x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z = r\mathrm{d}r,$$

где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Выполняя интегрирование, получаем

$$A = -\frac{c}{2}(r_1^2 - r_0^2). \tag{51}$$

По этой формуле вычисляют работу линейной силы упругости пружины при перемещении по любому пути из точки M_0 в которой ее удлинение (начальная деформация) равно $\lambda_0 = r_0$ в точку M_1, где деформация соответственно равна $\lambda = r_1$. В новых обозначениях (51) принимает вид

$$A = -\frac{c}{2}(\lambda^2 - \lambda_0^2) \tag{51'}$$

При перемещении из положения равновесия (пружина не деформирована), где $\lambda_0 = 0$, в любое положение с деформацией λ работа линейной силы упругости

$$A = -\frac{c}{2}\lambda^2. \tag{52}$$

Работа линейной силы упругости на перемещении из состояния равновесия всегда отрицательна и равна половине произведения коэффициента жесткости на квадрат деформации. Из формулы (51) или (52) следует, что работа линейной силы упругости не зависит от формы перемещения и работа по любому замкнутому перемещению равна нулю. Она также равна нулю, если точки M_0 и M_1 лежат на одной сфере, описанной из точки равновесия.

Работа силы, приложенной к твердому телу. Получим формулы для вычисления элементарной и полной работы силы, приложенной в какой-либо точке твердого тела, которое совершает то или иное движение. Сначала рассмотрим поступательное и вращательное движения тела, а затем общий случай движения твердого тела.

При поступательном движении твердого тела все точки тела имеют одинаковые по модулю и направлению скорости (рис. 63). Следовательно, если сила $\bar{F}$ приложена к точке M_k, то, так как $\bar{v}_k = \bar{v}$,

$$\mathrm{d}A = \bar{F}\cdot\bar{v}_k\mathrm{d}t = \bar{F}\cdot v\mathrm{d}t = \bar{F}\cdot\mathrm{d}\bar{r}, \tag{53}$$

где $\bar{r}$ — радиус-вектор произвольной точки твердого тела.

На каком-либо перемещении полная работа

$$A = \int_{M_0}^{M}\bar{F}\cdot\mathrm{d}\bar{r}, \tag{54}$$

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси скорость точки M можно вычислить по векторной формуле Эйлера (рис. 64):

$$\bar{v} = \bar{\omega}\times\bar{r};$$

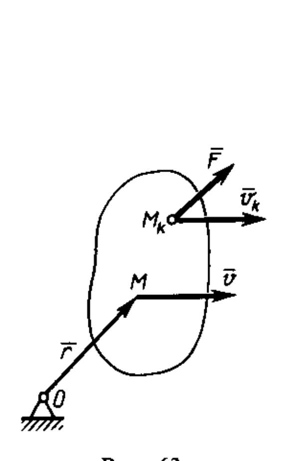

Рис. 63

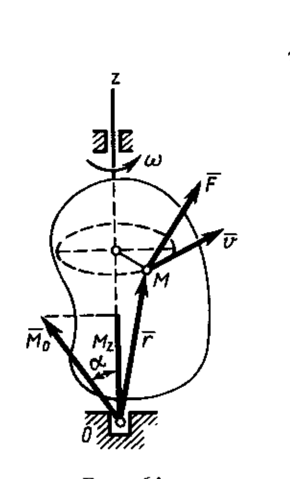

Рис. 64

тогда элементарную работу силы $\bar{F}$ определим по формуле

$$\mathrm{d}A = \bar{F}\cdot\bar{v}\mathrm{d}t = \bar{F}\cdot(\bar{\omega}\times\bar{r})\mathrm{d}t.$$

В смешанном векторном произведении, которое выражается в виде определителя, можно переставлять сомножители в круговом порядке:

$$\bar{F}\cdot(\bar{\omega}\times\bar{r}) = \bar{\omega}\cdot(\bar{r}\times\bar{F})$$

и

$$\mathrm{d}A = \bar{\omega}\cdot(\bar{r}\times\bar{F})\mathrm{d}t = \bar{\omega}\cdot\bar{M}_0\mathrm{d}t = \omega\mathrm{d}tM_0\cos\alpha,$$

так как

$$\bar{r}\times\bar{F} = \bar{M}_0(\bar{F}) = \bar{M}_0$$

является моментом силы относительно точки O.

Учитывая, что $M_0\cos\alpha = M_z$ — момент силы относительно оси вращения Oz и $\omega\mathrm{d}t = \mathrm{d}\varphi$, окончательно получаем

$$\mathrm{d}A = M_z\mathrm{d}\varphi. \tag{55}$$

Таким образом, *элементарная работа силы, приложенной к какой-либо точке тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна произведению момента силы относительно оси вращения на дифференциал угла поворота тела.*

Полная работа

$$A = \int_0^\varphi M_z\mathrm{d}\varphi. \tag{56}$$

В частном случае, если момент силы относительно оси вращения является постоянным, т. е. $M_z(\bar{F}) = \mathrm{const}$, работу определяют по формуле

$$A = M_z\varphi, \tag{57}$$

где φ — угол поворота тела, на котором вычисляют работу силы.

Так как $\mathrm{d}A = \bar{\omega}\cdot\bar{M}_0(\bar{F})\mathrm{d}t$, то мощность в случае вращения твердого тела вокруг неподвижной оси

$$W = \mathrm{d}A/\mathrm{d}t = \bar{\omega}\cdot\bar{M}_0(\bar{F}) = \omega M_z(\bar{F}). \tag{58}$$

Мощность силы, приложенной к вращающемуся вокруг неподвижной оси твердому телу, равна произведению угловой скорости тела на момент силы относительно оси вращения тела.

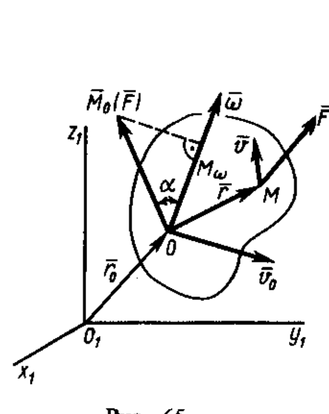

Рис. 65

Для свободного тела в общем случае движения скорость точки M, в которой приложена сила $\bar{F}$ (рис. 65),

$$\bar{v} = \bar{v}_0 - \bar{\omega}\times\bar{r};$$

следовательно,

$$\mathrm{d}A = \bar{F}\cdot\bar{v}\mathrm{d}t = \bar{F}\cdot\bar{v}_0\mathrm{d}t + \bar{F}\cdot(\bar{\omega}\times\bar{r})\mathrm{d}t.$$

Учитывая, что

$$\bar{v}_0\mathrm{d}t = \mathrm{d}\bar{r}_0 \text{ и } \bar{F}\cdot(\bar{\omega}\times\bar{r}) = \bar{\omega}\cdot(\bar{r}\times\bar{F}) = \bar{\omega}\cdot\bar{M}_0,$$

имеем

$$\mathrm{d}A = \bar{F}\cdot\mathrm{d}\bar{r}_0 + \bar{\omega}\cdot\bar{M}_0(\bar{F})\mathrm{d}t = \bar{F}\cdot\mathrm{d}\bar{r}_0 + \omega\mathrm{d}tM_0\cos\alpha.$$

Но так как $M_0\cos\alpha = M_\omega$ — момент силы относительно мгновенной оси относительного вращения вокруг точки O, $\omega\mathrm{d}t = \mathrm{d}\varphi$ — элементарный угол поворота вокруг этой оси, то окончательно получаем

$$\mathrm{d}A = \bar{F}\cdot\mathrm{d}\bar{r}_0 + M_\omega(\bar{F})\mathrm{d}\varphi. \tag{59}$$

Таким образом, элементарная работа силы, приложенной в какой-либо точке твердого тела, в общем случае движения складывается из элементарной работы на элементарном поступательном перемещении вместе с какой-либо точкой тела и на элементарном вращательном перемещении вокруг этой точки.

В случае вращения твердого тела вокруг неподвижной точки, выбрав эту точку за полюс O, по (59) для элементарной работы имеем

$$\mathrm{d}A = M_\omega(\bar{F})\mathrm{d}\varphi. \tag{60}$$

Поворот на угол $\mathrm{d}\varphi$ следует рассматривать в каждый момент времени вокруг своей мгновенной оси вращения.

Формулу (59) применяют и для плоского движения твердого тела, только в этом случае мгновенная ось относительного вращения перпендикулярна плоскости движения и проходит через произвольную точку тела.

При действии на твердое тело системы сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, ..., \bar{F}_N)$ для элементарной работы силы $\bar{F}_k$, согласно полученным формулам, имеем

$$\mathrm{d}A_k = \bar{F}_k\cdot\mathrm{d}\bar{r}_0 + \bar{M}_0(\bar{F}_k)\bar{\omega}\mathrm{d}t = \bar{F}_k\cdot\mathrm{d}\bar{r}_0 + M_\omega(\bar{F}_k)\mathrm{d}\varphi.$$

Элементарная работа системы сил

$$\mathrm{d}A = \sum_{k=1}^{N}\mathrm{d}A_k = \left(\sum_{k=1}^{N}\bar{F}_k\right)\cdot\mathrm{d}\bar{r}_0 + \left[\sum_{k=1}^{N}\bar{M}_0(\bar{F}_k)\right]\bar{\omega}\mathrm{d}t = \bar{R}\cdot\mathrm{d}\bar{r} + \bar{L}_0\cdot\bar{\omega}\mathrm{d}t = \bar{R}\cdot\mathrm{d}\bar{r}_0 + L_\omega\mathrm{d}\varphi,$$

где

$$\bar{R} = \sum_{k=1}^{N}\bar{F}_k; \quad \bar{L}_0 = \sum_{k=1}^{N}\bar{M}_0(\bar{F}_k); \quad L_\omega = \sum_{k=1}^{N}M_\omega(\bar{F}_k)$$

соответственно являются главным вектором и главными моментами системы сил относительно точки O и мгновенной оси относительного вращения, проходящей через точку полюс. Таким образом,

$$\mathrm{d}A = \bar{R}\cdot\mathrm{d}\bar{r}_0 + L_\omega\mathrm{d}\varphi = \bar{R}\cdot\mathrm{d}\bar{r}_0 + \bar{L}_0\cdot\bar{\omega}\mathrm{d}t, \tag{59'}$$

т. е. элементарная работа системы сил, приложенных к свободному твердому телу в общем случае его движения, складывается из элементарной работы главного вектора системы сил на элементарном поступательном перемещении вместе с какой-либо точкой тела и элементарной работы главного момента этих сил относительно выбранной точки на элементарном вращательном перемещении вокруг этой точки.

Работа внутренних сил твердого тела. Докажем, что для твердого тела сумма работ внутренних сил равна нулю при любом его перемещении. Очевидно, достаточно доказать, что сумма элементарных работ всех внутренних сил равна нулю. Рассмотрим две любые точки твердого тела: M_1 и M_2 (рис. 66). Так как внутренние силы есть силы взаимодействия точек тела, то для этих двух точек

$$\bar{F}_1^{(i)} = -\bar{F}_2^{(i)}; \quad F_1^{(i)} = F_2^{(i)}.$$

Введем единичный вектор $\bar{l}^0$, направленный по силе $\bar{F}_1^{(i)}$. Тогда

$$\bar{F}_1^{(i)} = \bar{l}^0F_1^{(i)}; \quad \bar{F}_2^{(i)} = -\bar{l}^0F_2^{(i)} = -\bar{l}^0F_1^{(i)}.$$

Рис. 66

Сумма элементарных работ сил $\bar{F}_1^{(i)}$ и $\bar{F}_2^{(i)}$

$$\mathrm{d}A_1^{(i)} + \mathrm{d}A_2^{(i)} = \bar{F}_1^{(i)}\cdot\bar{v}_1\mathrm{d}t + \bar{F}_2^{(i)}\cdot\bar{v}_2\mathrm{d}t = F_1^{(i)}\mathrm{d}t(\bar{v}_1\cdot\bar{l}^0 - \bar{v}_2\cdot\bar{l}^0).$$

Раскрывая скалярные произведения векторов в скобках, получаем

$$\mathrm{d}A_1^{(i)} + \mathrm{d}A_2^{(i)} = F_1^{(i)}\mathrm{d}t(v_1\cos\alpha_1 - v_2\cos\alpha_2) = 0,$$

так как в кинематике твердого тела доказано, что проекции скоростей

любых двух точек твердого тела на направление прямой линии, соединяющей эти точки, равны друг другу при любом движении твердого тела. В полученном выражении в скобках стоит разность этих проекций скоростей двух точек, т. е. величина, равная нулю.

Твердое тело можно считать состоящим из пар взаимодействующих точек, для каждой из которых сумма элементарных работ внутренних сил равна нулю.

Суммируя элементарные работы для всех пар точек, получаем $\sum\mathrm{d}A_k^{(i)} = 0$.

Как уже известно, главный вектор и главный момент всех внутренних сил для любой механической системы равны нулю. Сумма работ внутренних сил равна нулю только в случае твердого тела, а для любой механической системы в общем случае она не равна нулю.

В задачах в качестве механической системы часто рассматривают систему сочлененных твердых тел. При вычислении работы всех сил, приложенных к такой системе тел, очевидно, достаточно учесть работу внутренних сил в местах сочленения твердых тел. Если твердые тела сочленяются с помощью шарниров без трения, сумма работ таких двух внутренних сил равна нулю, так как внутренние силы в точке сочленения, как действие и противодействие, равны по модулю, но противоположны по направлению, а перемещение у точек приложения сил общее.

Таким образом, сочленение твердых тел с помощью шарниров без трения при вычислении работы внутренних сил не нарушает жесткости системы тел, так как сумма работ внутренних сил в этих шарнирах равна нулю при любых перемещениях системы сочлененных твердых тел. Систему сочлененных с помощью таких шарниров твердых тел при вычислении работы всех внутренних сил можно считать одним твердым телом. Это характерно и для случая сочленения системы твердых тел с помощью нерастяжимых нитей, канатов и т. п. В этом случае работа внутренних сил натяжений также равна нулю.